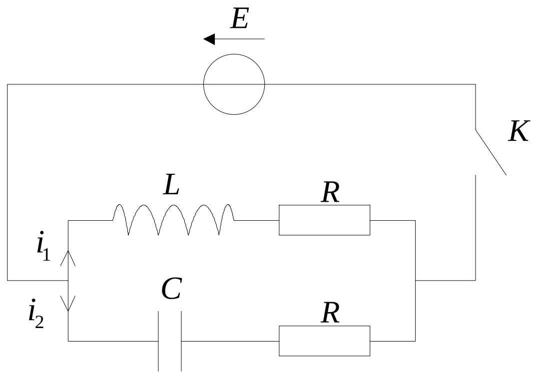
-EXERCICE 3.3-

• ENONCE :

« Circuits R-C et R-L en parallèle »



Le condensateur C étant initialement déchargé, on ferme l'interrupteur K à l'instant t=0.

1) Déterminer les courants $i_1(t)$ et $i_2(t)$, puis tracer les courbes correspondantes.

2) A quel instant aura-t-on $i_1 = i_2$?

• L'interrupteur étant toujours fermé, on attend la fin de l'établissement du régime permanent ; à un instant pris comme nouvelle origine des temps t', on ouvre l'interrupteur K.

3) Etablir les équations différentielles vérifiées par l'intensité du courant $i(t')$ et par la tension $u(t')$ aux bornes du condensateur.

4) A t'=0, quelles sont les valeurs initiales $i(0^-)$ et $u(0^-)$?

5) En déduire les expressions de $i(t')$ et de $u(t')$, en distinguant les différents cas possibles (on ne calculera pas les constantes d'intégration).

• **CORRIGE** :

«Circuits R-C et R-L en parallèle »

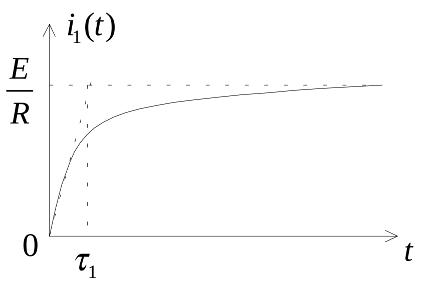
1) Les 2 équations différentielles sont :

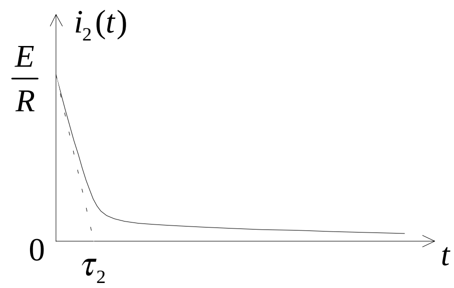
$$E = Ri_1(t) + L\frac{di_1(t)}{dt} \quad \text{et} \quad E = u_c(t) + RC\frac{du_c(t)}{dt}, \quad \text{avec} \quad i_2(t) = C\frac{du_c(t)}{dt}$$

• En tenant compte de $i_1(0^-) = i_1(0^+) = 0$ (continuité du courant traversant une inductance) et de $u_c(0^-) = u_c(0^-) = 0$ (continuité de la tension aux bornes d'un condensateur), un calcul développé dans le cours conduit à :

$$\boxed{i_1(t) = \frac{E}{R}[1-\exp(-t/\tau_1)]} \quad \boxed{\tau_1 = \frac{L}{R}} \; ; \quad u_c(t) = E[1-\exp(-t/\tau_2)] \Rightarrow \boxed{i_2(t) = \frac{E}{R}\exp(-t/\tau_2)} \quad \boxed{\tau_2 = RC}$$

• On en déduit les courbes suivantes :

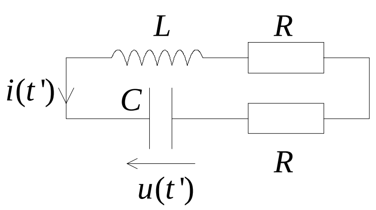




2) Cet instant, noté t_0, est déterminé par : $\boxed{1-\exp(-t_0/\tau_1) = \exp(-t_0/\tau_2)}$

Rq : l'instant t_0 n'est pas donné de façon analytique, mais on pourrait le calculer numériquement si les valeurs de R, L, C étaient fournies.

3) Pour $t' \geq 0$, le circuit se ramène à :



La loi des mailles donne:

$$u_L(t') + u(t') + 2u_R(t') = 0$$

avec: $u_L(t') = L\dfrac{di(t')}{dt'}$; $u_R(t') = Ri(t')$ et $i(t') = C\dfrac{du(t')}{dt'}$

On en déduit : $$\boxed{\frac{d^2u(t')}{dt'^2} + \frac{2R}{L} \times \frac{du(t')}{dt'} + \frac{u(t')}{LC} = 0} \quad \text{et} \quad \boxed{\frac{d^2i(t')}{dt'^2} + \frac{2R}{L} \times \frac{di(t')}{dt'} + \frac{i(t')}{LC} = 0}$$

4) D'après la question 1), on sait que $i_2(t=\infty) = 0 \Rightarrow \boxed{u(t=\infty) = u(t'=0^-) = u(t'=0^+) = E}$

D'autre part : $\boxed{i_1(t=\infty) = \frac{E}{R} = -i(t'=0^-) = -i(t'=0^+)}$

Rq : le signe « moins » provient de l'orientation contraire des courants i_1 et i.

Christian MAIRE

5) Les solutions des équations de la question 3) sont à chercher en $\exp(rt')$, où $r \in \mathbb{C}$; le polynôme caractéristique est : $r^2 + \frac{2R}{L} \times r + \frac{1}{LC} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\Delta' = \frac{R^2}{L^2} - \frac{1}{LC}}$

♦ si $R = \sqrt{\frac{L}{C}}$, $\Delta' = 0$: le régime est dit **critique**, de la forme : $\boxed{u(t') = (A + Bt')\exp(-\frac{R}{L}t')}$

♦ si $R \succ \sqrt{\frac{L}{C}}$, $\Delta' \succ 0$: le régime est **apériodique**, de la forme : $\boxed{u(t') = A\exp(r_1 t') + B\exp(r_2 t')}$

(où r_1 et r_2 $\in \mathbb{R}^-$)

♦ si $R \prec \sqrt{\frac{L}{C}}$, $\Delta' \prec 0$: le régime est **pseudopériodique**, de la forme :

$\boxed{u(t') = \exp(-\frac{R}{L}t') \times [A\cos(\Omega t') + B\sin(\Omega t')]}$ avec : $\boxed{\Omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{L^2}}}$ (= pseudo-pulsation)

Rq : dans les 3 cas, les 2 constantes d'intégration se déterminent à l'aide des 2 **conditions initiales** de la question 4), qui portent sur la grandeur $u(t')$ et sa dérivée $i(t')$ (à une constante multiplicative près).